

Abitur 2010 Mathematik LK Stochastik Aufgabe C2

Teilaufgabe 1. (4 BE)

Nach einem großen Sportfest mit 1500 teilnehmenden Sportlern sollen Dopingtests durchgeführt werden. Dazu werden die Urinproben von 10 % der teilnehmenden Sportler auf Doping untersucht. Im Folgenden soll angenommen werden, dass 12 % der Sportler Dopingmittel einnehmen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Stichprobe die Anzahl der gedopten Sportler genau dem Erwartungswert entspricht. Rechnen Sie mit der Binomialapproximation.

Bei diesen Testverfahren ist es besonders wichtig, sowohl die Dopingsünder richtig zu erkennen als auch die unschuldigen Sportler nicht fälschlich zu verdächtigen. Man spricht hierbei von der Sensitivität und der Spezifität eines Tests.

Die Sensitivität (die Wahrscheinlichkeit, dass eine gedopte Person richtig erkannt wird) des verwendeten Tests sei 99 %, die Spezifität (die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht gedopte Person richtig erkannt wird) sei 97 %.

Teilaufgabe 2.1 (11 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Test ein (bzgl. Doping) positives Ergebnis zeigt.

Bestimmen Sie damit die erwartete Anzahl der positiv getesteten Sportler.

Teilaufgabe 2.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getesteter Sportler zu Unrecht verdächtigt wird.

Der Kabarettist Bodo Bach beschreibt den Beitrag seines Radfahrvereins zum „sauberen“ Sport: Alle Sportler haben eine Urinprobe abgegeben und diese gut gemischt in einem Eimer zur Dopingkontrolle geschickt...

Ein solches Testverfahren – ein sogenanntes Gruppenscreening – gibt es tatsächlich. Dabei wird der Urin von n Personen gemischt und ein Gruppentest durchgeführt. Ist das Ergebnis positiv, werden alle n Gruppenmitglieder einzeln getestet. Man erhofft sich dadurch eine Reduzierung der Anzahl von Untersuchungen.

Teilaufgabe 3.1 (15 BE)

X bezeichnet die Anzahl der benötigten Tests bei einer Gruppengröße von n Personen mit $n > 1$. Gehen Sie hier davon aus, dass Sensitivität und Spezifität gleich 1 sind, dass also der Test immer ein korrektes Ergebnis liefert. Wie in Aufgabe 1 ist die Wahrscheinlichkeit $p = 0,12$, dass ein zufällig ausgewählter Sportler Dopingmittel genommen hat. Erläutern Sie, was in der Tabelle ermittelt wird.

k	1	$1 + n$
$P(X = k)$	$0,88^n$	$1 - 0,88^n$

Teilaufgabe 3.2

Berechnen Sie die zu erwartende Anzahl von Tests pro Person in Abhängigkeit von n .

Teilaufgabe 3.3

In Material 1 wird der Graph der Funktion E mit $E(n) = 1 - 0,88^n + \frac{1}{n}$ dargestellt. Beschriften Sie die Achsen und ermitteln Sie aus der Grafik, welche Gruppengröße n optimal ist, um mit möglichst wenigen Tests pro Person auszukommen.

